

Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап, 25 ноября 2015 года

**8 класс**

1. На доске написаны два числа. Одно из них увеличили в 6 раз, а другое уменьшили на 2015, при этом сумма чисел не изменилась. Найдите хотя бы одну пару таких чисел.

2. Известно, что  $a^2 + b^2 = 3ab$  и  $a \neq b$ . Вычислите значение выражения

$$\frac{a + b}{a - b}.$$

3. Окружность катится снаружи по квадрату, длина стороны которого равна длине окружности. Сколько полных оборотов сделает эта окружность вокруг своего центра к моменту возвращения в исходное положение?

4. Дано число 2015. Разрешается за один ход либо вычесть из числа сумму его цифр, либо переставить его цифры в любом порядке. Например, из числа 13 можно за один ход получить либо число 9, либо число 31. Какое наименьшее положительное число можно получить, действуя таким образом?

5. Из бумаги вырезан правильный шестиугольник, то есть выпуклый шестиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. Можно ли, складывая его по прямым линиям, получить правильный шестиугольник, у которого площадь в три раза меньше площади исходного шестиугольника?

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап, 25 ноября 2015 года

**9 класс**

1. Найдите наименьшее натуральное число, для которого 20% и 75% от него являются целыми числами.
2. Сумма 65 чисел равна 2015. Когда самое большое из них увеличили в три раза, а другое уменьшили на 62, сумма всех чисел не изменилась. Найдите наименьшее среди этих чисел.
3. Квадратный трёхчлен  $f(x) = x^2 + ax + b$  с целыми коэффициентами удовлетворяет неравенству  $f(x) \geq 0,2$  при всех  $x$ . Докажите, что  $f(x) \geq 0,75$  при любом  $x$ .
4. Выпуклый многоугольник, у которого  $n^2$  сторон ( $n > 2$ ), разрезали на  $n$  пятиугольников. Докажите, что  $n = 3$ .
5. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  его углов пересекают окружность в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  соответственно. Докажите, что сумма длин биссектрис больше периметра четырёхугольника  $ABCD$ .

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап, 25 ноября 2015 года

**10 класс**

1. Отрезок длины 1 разделили на 2015 отрезков (не обязательно равных). На каждом из них, как на диаметре, построили полуокружность. Эту же операцию повторили, разделив исходный отрезок на 2016 частей. Найдите отношение суммы длин полуокружностей в первом случае к сумме длин полуокружностей во втором.

2. Найдите все функции  $f$ , удовлетворяющие при всех  $x$  уравнению

$$4 \cdot f(x) + f(2015 - x) = x.$$

3. Найдите все действительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$  такие, что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2015} = 2015 \quad \text{и} \quad |a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \dots = |a_{2015} - a_1|.$$

4. Рассмотрим  $2n + 1$  действительных чисел в промежутке  $(1; 2^n)$ . Докажите, что из них можно выбрать три числа, которые будут длинами сторон некоторого треугольника.

5. Внутри угла  $60^\circ$  с вершиной  $A$  проведён луч  $AB$ . В каждый из образовавшихся острых углов вписана окружность, причём обе они касаются луча  $AB$  в точке  $B$ . Найдите длину отрезка  $AB$ , если радиусы окружностей равны 1 и 3.

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап, 25 ноября 2015 года

**11 класс**

1. Отрезок длины 1 разделили на 2015 отрезков (не обязательно равных). На каждом из них, как на диаметре, построили полуокружность. Эту же операцию повторили, разделив исходный отрезок на 2016 частей. Найдите отношение суммы длин полуокружностей в первом случае к сумме длин полуокружностей во втором.

2. Найдите наименьшее (не обязательно целое) положительное число, для которого 35% и 77% от него являются целыми числами.

3. Функция  $f$  непрерывна на всей числовой оси. Известно, что уравнение  $f(x + f(y + f(z))) = x + y + z$  имеет хотя бы одно решение. Докажите что уравнение  $f(x) = x$  также имеет решение.

4. Сумма положительных чисел  $a, b$  и  $c$  равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq 3(ab + bc + ca).$$

5. У выпуклого многоугольника 500 сторон, его периметр равен 700. Докажите, что какие-то три его вершины образуют треугольник, площадь которого меньше 1.

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*